Πεπερασμένες Διαφορές

Προσέγγιση της πρώτης παραγώγου

Από τον ορισμό της παραγώγου για συναρτήσεις μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο δίνεται από τον τύπο

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Για μικρές θετικές τιμές της παραμέτρου h, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της $f'(x_0)$ με τον ακόλουθο λόγο

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h > 0.$$

Ανάλογα, η $f'(x_0)$ μπορεί να προσεγγισθεί από τον λόγο

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, \quad h > 0.$$

Επίσης, ένας άλλος τρόπος ώστε να προσεγγισθεί η $f'(x_0)$ για μικρά h, είναι

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}, \quad h > 0.$$

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$\begin{aligned}
\delta_h^+ f(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, &\quad h > 0, \\
\delta_h^- f(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}, &\quad h > 0, \\
\delta_h^c f(x_0) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}, &\quad h > 0.
\end{aligned}$$

Η διαφορά $\delta_h^+ f(x)$ ονομάζεται διαφορά προς τα εμπρός, η διαφορά $\delta_h^- f(x)$ ονομάζεται διαφορά προς τα πίσω και η διαφορά $\delta_h^c f(x)$ ονομάζεται κεντρική διαφορά. Οι παραπάνω διαφορές για την προσέγγιση των παραγώγων μιας συνάρτησης f καλούνται και πεπερασμένες διαφορές.

$\boldsymbol{\text{Ά}σκηση\ 1}$: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ και το σημείο $x_0 = 1.1$. Υπολογίστε τις πεπερασμένες διαφορές στο σημείο x_0 για $h = [0.5, 0.1, 0.05, 0.01]$.

In [1]:

```
Approximations
Forward Difference  = [0.749387, 0.870114, 0.889035, 0.904984]
Backward Difference = [1.21227, 0.9531, 0.9304, 0.91325]
Central Difference  = [0.98083, 0.91161, 0.90972, 0.90912]
```

Έστω ότι το σφάλμα ϵ μιας προσέγγισης ικανοποιεί $\epsilon \approx Ch^p$, για μικρό βήμα h, με C μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του h.

Αν θεωρήσουμε δύο προσεγγίσεις με ϵ_1 και ϵ_2 με βήματα h_1 και h_2, αντίστοιχα, έχουμε ότι ο λόγος των αντίστοιχων σφαλμάτων θα ικανοποιεί

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p, \quad \textit{οπότε} \quad p \approx \frac{\log\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

$\boldsymbol{Άσκηση\ 2}$: Θεωρήστε τα δεδομένα της άσκησης 1. Βρείτε την "πειραματική" τάξη σύγκλισης των πεπερασμένων διαφορών. Ποιο είναι το p στις παραπάνω τρεις περιπτώσεις;

In [13]:

```
Errors
Forward Difference  = [0.1597, 0.03897, 0.02005, 0.00411]
Backward Difference = [0.30318, 0.04401, 0.02131, 0.00416]
Central Difference  = [0.07174, 0.00251, 0.0006, 3e-05]
```

Προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου

Από τον ορισμό της δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις μιας μεταβλητής γνωρίζουμε ότι η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο δίνεται από τον τύπο

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Επομένως, μπορούμε να προσεγγίσουμε την $f''(x_0)$ χρησιμοποιώντας μια από τις προσεγγίσεις $\delta_h^+ f'(x_0)$, $\delta_h^- f'(x_0)$ ή $\delta_h^c f'(x_0)$.

Αν, όμως, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τιμές της f, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την $f'(x_0)$ με κάποια προσέγγισή της. Έτσι, ένας τρόπος είναι,

$$
\begin{aligned}
f''(x_0) \approx \delta_h^+ f'(x_0) &\approx \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \\
&\approx \frac{\delta_h^- f'(x_0+h) - \delta_h^- f'(x_0)}{h} := \delta_h^+ \delta_h^- f(x_0),
\end{aligned}
$$

όπου από τον ορισμό της δ_h^- έχουμε ότι

$$
\delta_h^+ \delta_h^- f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}
$$

Ανάλογα μπορορούμε να ορίσουμε τις πεπερασμένες διαφορές $\delta_h^- \delta_h^+ f(x_0)$ και $\delta_{h/2}^c \delta_{h/2}^c f(x_0)$. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να δείξουμε (κάνοντας τις πράξείς) ότι όλες οι παραπάνω είναι ίσες.

$\textbf{Άσκηση 3}$: Επαναλάβετε τις ασκήσεις 1 και 2 για τις πεπερασμένες διαφορές για την προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου.

In [14]:

```
Approximations
Central Difference  = [-0.92577, -0.82988, -0.8273, -0.82648]
```

In [17]:

```
Errors
Central Difference  = [0.09932, 0.00343, 0.00085, 3e-05]
```